ՀՏԴ 517.9

Դիֆերենցիալ հավասարումների թվային ինտեգրման մի մեթոդի մասին

Մահակյան Ռոբերտ,
Ենոքյան Ռոբերտ

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-2025.2-95

Հանգուցային բառեր. տարբերական հավասարումներ, հաշվարկային ցանց, ուղիղ ընթացք, հետադարձ ընթացք, կոռեկտություն, հավասարումների համակարգ

Նախաբան

Ինչպես սովորական, այնպես էլ մասնական ածանցյալներով գծային և քվազիգծային դիֆերենցիալ հավասարումների եզրային խնդիրների մոտավոր ինտեգրման տարբերական մեթոդները հիմնված են դիֆերենցիալ հավասարումներն իրենց ապրոքսիմացնող տարբերական հավասարումների համակարգով փոխարինելու սկզբունքի վրա: Անհայտների արժեքներն այդ դեպքում հաշվվում են կետերի դիսկրետ բազմության վրա, որն անվանում են **հաշվարկային ցանց**: Այդ հաշվարկային ցանցը նշված տարբերական հավասարումների համակարգերի հետ միասին կազմում են տարբերական սխեմա, ընդ որում՝ համակարգի գործակիցները կախված են, անշուշտ, հաշվարկային ցանցի կետերի դասավորությունից:

Տարբերական սխեմաները կարող են լինել երկու էապես տարբեր տիպերի: Նրանցից առաջինը բացահայտ կամ լոկալ սխեմաներն են, որոնք կառուցված են այնպես, որ անհայտ ֆունկցիայի յուրաքանչյուր արժեք արտահայտվում է արդեն գտած արժեքի միջոցով (տարբերական հավասարումների համակարգի մատրիցը եռանկյուն է): Անբացահայտ սխեմաները, ի տարբերություն բացահայտների, բերում են մեծ թվով հանրահաշվական հավասարումների համակարգեր լուծելու անհրաժեշտությանը: Պարզ է, որ բացահայտ սխեմաները գերադասելի են իրենց պարզությամբ, սակայն դրանք հաճախ անհարմար են դառնում այն սահմանափակությունների պատճառով, որոնք հարկ է լինում դնել հաշվարկային ցանցի քայլերի փոխառնչությունների վրա՝ ըստ տարբեր փոփոխականների: Այդ սահմանափակումներն առաջանում են կայունության պահանջի շնորհիվ: Ասվածի ուժով՝ հաշվողական պրակտիկայում առավել հաճախ հարկ է լինում օգտվել անբացահայտ սխեմաներից:

Տարբերական սխեմաներին համապատասխանող հավասարումների համակարգերը սովորաբար լինում են հատուկ տեսքի (նրանց մատրիցները պարունակում են շատ զրոներ), և դա հաճախ թույլատրում է նշել նրանց լուծման համեմատաբար պարզ մեթոդներ, որոնցից մեկի էությունը պարզաբանենք համեմատաբար պարզ օրինակների դիտարկումով: Այդ դիտարկումները կանենք գծային հավասարումների համար, որոնք դժվար չէ տեղափոխել քվազիգծային հավասարումների դեպքի վրա:

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ

Դիտարկենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y'' = p(x)y + f(x), \tag{1}$$

որտեղ $p(x) > 0$, հետևյալ եզրային պայմաններով՝

$$\begin{aligned} &y' = \alpha_0 y + \beta_0 \Big|_{x=0} \quad \text{ա)} \\ &y' = \psi_0 y + \omega_0 \Big|_{x=2} \quad \text{բ)} \end{aligned} \tag{2}$$

Այս եզրային խնդրի լուծման դժվարությունը այն է, որ հնարավոր չէ գտնել $y(x)$-ը՝ սկսելով ինտերվալի որևէ ծայրակետից (պայմանները դրա համար չեն բավականացնում)։ Ուստի սովորաբար դիմում են հետևյալ եղանակին. ժամանակավորապես դեն նետելով աջ եզրային պայմանը և այն փոխարինելով որևէ պայմանով՝ ձախ ծայրակետում (օրինակ $y' = 1\Big|_{x=0}$), լուծում են ստացված խնդիրը՝ նախնական պայմաններով։ Այն է՝ գտնում են (1) հավասարման ինտեգրալային կորը, որը ձախ եզրում բավարարում է հետևյալ առնչություններին.

$$\begin{aligned} &y' = \alpha_0 y + \beta_0 \Big|_{x=0} \\ &y'\Big|_{x=0} = 1: \end{aligned} \tag{2ա}$$

$y_1(x)$ լուծումը բավարարում է (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և (2ա) ձախ եզրային պայմանին, բայց չի բավարարում (2բ) աջ եզրային պայմանին։ Այդ լուծումը շտկելու համար ավելացնենք $y_2(x)$ երկրորդ ինտեգրալային կորը, որը բավարարում է

$$y'' = p(x)y, \tag{1′}$$

համասեռ դիֆերենցիալ հավասարմանը և հետևյալ նախնական պայմաններին ձախ եզրում.

$$\begin{aligned} &y' = \alpha_0 y\Big|_{x=0} \\ &y'\Big|_{x=0} = 1: \end{aligned} \tag{2′ա}$$

Այս առնչություններից առաջինը համասեռ եզրային պայման է, որը համապատասխանում է (2ա)-ին։

Հարկավոր ինտեգրալային կորը կստացվի հետևյալ գծային կոմբինացիայի տեսքով.

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x), \tag{3}$$

որտեղ μ գործակիցը ընտրում ենք այնպես, որ բավարարվի (2բ) պայմանը՝ աջ եզրում։

Նկարագրված եղանակի անհարմարությունը այն է, որ այն հանգեցնում է ճշգրտության կտրուկ կորստի, քանի որ (1′) հավասարման լուծման մեջ է մտնում ֆունկցիա, որը x-ի աճման հետ աճում է էքսպոնենցիալ օրենքով, ուստի (3) գծային կոմբինացիան յուրաքանչյուր կետում ($x = 0$ կետից բավականաչափ հեռու) իրենից կներկայացնի երկու մեծ թվերի տարբերություն։ Այդ էֆեկտը հատկապես կտրուկ

˙ Պարզության համար սահմանափակվենք եզրային պայմանների այս տեսքով, չնայած կարելի էր չենթադրել, որ նրանք լուծված են y'-ի նկատմամբ։ Ավելին, նրանցից մեկը (օրինակ, աջը) կարելի էր տալ ոչ գծային. $\varphi(y, y')\Big|_{x=0} = 0$։

կարտահայտվի, երբ $A = \sqrt{l\int_0^l p(x)dx}$ մեծությունը 1-ի համեմատությամբ մեծ է (ավագ ածանցյալին առընթեր փոքր պարամետրի դեպքը):

Այսպես, օրինակ, եթե $p(x) = 1$, $l = 10$, ապա $A = 10$: Այս դեպքում (1՛) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$C_1e^x + C_2e^{-x}$$

տեսքը և նրա առանձին գումարելին $[0, l]$ հատվածի վրա աճում է $e^{10} \approx 2{,}2 \cdot 10^4 (< 10^5)$ անգամ: Նշանակում է, ճշգրտությունը պահպանելու համար պետք է ունենալ պահուստային 5 նիշ:

Առաջարկվող մեթոդը զերծ է նշված թերությունից, ուստի կարող է հաջողությամբ կիրառվել հաշվողական պրակտիկայում: Այն հիմնված է հետևյալ դրույթների վրա.

(2ա) ձախ եզրային պայմանը (1) հավասարման ընդհանուր լուծումից անջատում է մեկ պարամետրից կախված ինտեգրալային կորերի ընտանիք: Դրանով իսկ $[0, l]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում $y(x)$ և $y'(x)$-ի միջև առաջնում է գծային առնչություն.

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x), \qquad (4)$$

որտեղ $\alpha(x)$ և $\beta(x)$-ը միարժեքորեն որոշվում են (1) հավասարումով և (2ա) ձախ եզրային պայմանով: Այսպիսով, եզրային պայմանը տարածվում է ելակետային ինտերվալի բոլոր կետերում: Եզրային պայմանի այդ տարածումն անվանենք **ուղիղ ընթացք** (прямая прогонка):

Ցույց տանք, որ $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ ֆունկցիաները, որոնք իրագործում են ուղիղ ընթացք, որոշվում են առաջին կարգի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումներից.

$$\alpha' + \alpha^2 = p(x), \qquad (5)$$

$$\beta' + \beta\alpha = f(x): \qquad (6)$$

Նախնական պայմաններն ակնհայտորեն կլինեն $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$:

Իրոք, (4)-ի ածանցումից կունենանք.

$$y'' = \alpha' \cdot y(x) + \alpha \cdot y'(x) + \beta' = \alpha' \cdot y(x) + \alpha \cdot (\alpha \cdot y(x) + \beta) + \beta' = \\ = (\alpha' + \alpha^2) \cdot y(x) + (\alpha\beta + \beta'),$$

որը, համեմատելով (1)-ի հետ, կստանանք (5) և (6) հավասարությունները:

Սրանով իրագործվում է ուղիղ ընթացք և $x = l$ կետում ստացվում է նոր եզրային պայման, որը տարածվում է $x = 0$ կետից: Վերջինս, աջ եզրում տրված (2բ) պայմանի հետ, հնարավորություն է տալիս գտնել $y(l)$-ը: Հետևաբար, $y(l) = y_l$-ը կգտնենք հավասարումների հետևյալ համակարգից.

$$y' = \psi_0 y + \omega_0 \Big|_{x = l} \qquad (2'\text{բ})$$
$$y'(l) = \alpha(l)y(l) + \beta(l):$$

Այժմ կարելի էր գտնել $y(x)$-ը՝ լուծելով խնդիրը (1) հավասարման համար հետևյալ նախնական պայմաններով.

$$y(l) = y_l, y' = \psi_0 y + \omega_0 \Big|_{x = l}:$$

Սակայն դա կհանգեցներ ճշգրտության կտրուկ կորստի՝ վերը նշված պատճառով ($y'' = p(x)y$ հավասարման էքսպոնենցիալ օրենքով աճող լուծման առկայությունը): Նկատենք, որ $y(x)$-ի որոշման համար այժմ արդեն անհրաժեշտություն չկա լուծել (1) ելակետային դիֆերենցիալ հավասարումը, քանի որ այդ նպատակով կարելի է օգտվել

առավել պարզ (4) հավասարումից, որը հայտնի $\alpha(x)$ և $\beta(x)$-ի դեպքում առաջին կարգի գծային հավասարում է, և $y(l)=y_l$ նախնական պայմանից, ու ստանալ $y(x)$-ը $(0\le x\le l)$, որը կանվանենք **հետադարձ ընթացք** (обратная прогонка):

Այժմ զբաղվենք նկարագրված մեթոդի կոռեկտության հիմնավորումով, այսինքն՝ ցույց տանք, որ այն չի հանգեցնում ճշգրտության կորստի՝ նույնիսկ $A=\sqrt{l\int_0^l p(x)dx}$-ի մեծ արժեքների դեպքում:

Պարզության համար՝ բոլոր ենթադրություններն անենք, ընդունելով, որ (1) հավասարման $p(x)$ գործակիցը հաստատուն է.

$$p(x)=\gamma^2: \tag{7}$$

Այդ դեպքում (5) հավասարման լուծումը կարող ենք գրել բացահայտ տեսքով.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \gamma\,\mathrm{th}\left(\gamma x+\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right), && (|\alpha_0|<\gamma) \quad \text{ա)}\\ \alpha &= \gamma\,\mathrm{cth}\left(\gamma x+\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\alpha_0-\gamma}\right), && (|\alpha_0|>\gamma) \quad \text{բ)}\\ \alpha &= \alpha_0, && (|\alpha_0|=\gamma) \quad \text{գ)} \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

Այսպիսով, վերը նշված պրոցեսը հանգում է (5), (6) և (4) երեք հավասարումների հաջորդաբար լուծմանը, ընդ որում՝ նախնական պայմանները առաջին երկուսի համար տրվում են ձախ եզրում, երրորդի համար՝ աջ եզրում: Նշենք նաև, որ α-ն (6) և (4) հավասարումների մեջ մտնում է հակադիր նշաններով, և այդ հավասարումների համար նախնական պայմանները տրվում են հակադիր ծայրակետերում: Ստորև կհամոզվենք, որ այդ փաստը վճռորոշ է ընթացքի կոռեկտությունը հիմնավորելիս:

Նախ ընդունենք $\alpha_0>0$: Այդ դեպքում (5) հավասարման լուծումից կհետևի (տե՛ս (8)-ը)

$$\alpha(x)>0$$

$[0,l]$ ողջ հատվածի վրա:

Ցույց տանք, որ (6) հավասարման լուծման դեպքում ճշգրտությունը չի կորչում: (6)-ը առաջին կարգի գծային հավասարում է, ընդ որում՝ որոնելի ֆունկցիայի գործակիցը հավասար է $\alpha>0$, ուստի համապատասխան համասեռ հավասարման լուծումը x-ի աճմանը զուգընթաց նվազում է: Բայց նախնական պայմանն այդ հավասարման համար տրվում է ձախ եզրում՝ $\beta(0)=\beta_0$, ուստի սխալը նրա լուծման դեպքում մարում է:

(4) հավասարումը նույնպես առաջին կարգի գծային հավասարում է, ընդ որում՝ համապատասխան համասեռ հավասարման գործակիցը՝ $-\alpha<0$ և նրա լուծումը նվազում է x-ի նվազմանը զուգընթաց: Նախնական պայմանը տրվում է ոչ թե ձախ, այլ աջ եզրում՝ $y(l)=y_l$, ուստի այս դեպքում ևս ճշգրտությունը չի կորչում:

Մնում է պարզել, չի՞ կորչում արդյոք ճշգրտությունը (5) հավասարման լուծման դեպքում:

Ենթադրենք, որ $\alpha(0)=\alpha_0$ նախնական պայմանի մեջ (ձախ եզրում) թույլ է տրվել ε_0 սխալ: Այդ $\varepsilon(x)$ սխալի պատճառով առաջացած մեծությունը բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ բավարարում է այն հավասարմանը, որն ստացվում է (5) հավասարման վարիացիայից.

$$\varepsilon'+2\alpha\varepsilon=0: \tag{9}$$

(9) հավասարման գործակիցը $2\alpha > 0$, իսկ նախնական պայմանը տրվում է ձախ ծայրում, և մենք ունենում ենք նույն պայմանները, ինչը ունեինք (6) հավասարման դեպքում:

Այն ենթադրությունը, որ $p(x) = \gamma^2 = const$, մենք օգտագործեցինք միայն մեկ հարցում, այն է՝ օգտվելով (5) հավասարման լուծման բացահայտ տեսքից, եզրակացրեցինք, որ

(ա) եթե $\alpha(0) = \alpha_0 > 0$, ապա $\alpha(x) > 0$ բոլոր $x \geq 0$ համար: Նշանակում է նախորդ բոլոր դատողությունները կպահպանեն իրենց ուժը նաև $p(x) > 0$ փոփոխականի համար, եթե միայն ապացուցվի (ա) պնդումը:

(5) հավասարման հետ միաժամանակ դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\left.\begin{aligned} u' &= -p(x)v \\ v' &= -u \end{aligned}\right\}: \tag{10}$$

Ինչպես հայտնի է, այդ լուծումը գոյություն ունի և անընդհատ է ողջ թվային առանցքի վրա: Դիցուք այդ համակարգի լուծումներն են $u(x)$ և $v(x)$-ը, որոնք բավարարում են հետևյալ նախնական պայմաններին.

$$u(0) = \alpha_0, v(0) = -1:$$

Ցույց տանք, որ (5) հավասարման լուծումը՝ $\alpha(0) = \alpha_0$ նախնական պայմանով, արտահայտվում է $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաների միջոցով՝ հետևյալ կերպ.

$$\alpha(x) = -\frac{u(x)}{v(x)}: \tag{11}$$

Իրոք, ածանցելով (11)-ը և նրա մեջ տեղադրելով u'-ի և v'-ի արտահայտությունները (10)-ից, կստանանք.

$$\alpha' = -\frac{u'v - v'u}{v^2} = -\frac{-pv^2 + u^2}{v^2} = p - \left(\frac{u}{v}\right)^2 = p - \alpha^2:$$

Հետևաբար, $\alpha(x) = -\frac{u(x)}{v(x)}$-ը բավարարում է (5) հավասարմանը: $\alpha(0) = \alpha_0$ նախնական պայմանը ևս ակնհայտորեն կատարվում է: Այսպիսով, (ա) պնդումը ապացուցված կլինի, եթե ապացուցենք, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դրական են $0 \leq x < +\infty$ ողջ կիսառանցքի վրա: Ենթադրենք հակառակը՝ որևէ $x_0 > 0$ կետում $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաներից որևէ մեկը դառնում է զրո: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $u(x_0) = 0$ (միաժամանակ չի կարող լինել $v(x_0) = 0$, քանի որ այդ դեպքում (10) համակարգի դիտարկվող լուծումը նույնաբար հավասար կլիներ զրոյի): Քանի որ $u(0) = \alpha_0 > 0$, ապա $u(x) > 0$ ողջ $0 \leq x \leq x_0$ ինտերվալում, ուստի $u'(x_0) \leq 0$: Մյուս կողմից, (10) համակարգի առաջին հավասարման ուժով

$$u'(x_0) = -p(x_0) \cdot v(x_0),$$

ընդ որում $-v(x_0) > 0$, քանի որ $v(0) = -1$ և x_0-ն առաջին կետն է, որտեղ $u(x)$-ը դառնում է 0, իսկ $p(x)$-ը ամենուրեք դրական է: Հետևաբար, $u'(x_0) > 0$: Ստացված հակասությունն ապացուցում է մեր պնդումը:

Այսպիսով, $\alpha_0 > 0$ դեպքում ընթացքի **մեթոդը** կոռեկտ է:

Նկատենք, որ (ա) պնդումն իրավացի է նաև հետևյալ տեսքով. $\alpha(x_0) > 0$ դեպքում $\alpha(x) > 0, \forall x \geq x_0$ համար:

Դիցուք այժմ $\alpha_0 < 0$ և գործակիցը՝ $p(x) = \gamma^2 = const$: Ցույց տանք, որ այս դեպքում ևս ընթացքը կոռեկտ է, եթե միայն $|\alpha_0|$-ն γ-ի համեմատությամբ փոքր է (բավականաչափ մեծ α_0-ի դեպքում՝ $|\alpha_0| > \gamma$ ընթացքը կորցնում է կայունությունը):

(4) հավասարման ընդհանուր լուծումից $|\alpha_0| < \gamma$ դեպքում

$$\alpha = \gamma \operatorname{th}\left(\gamma x + \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right)$$

երևում է, որ α-ն իր նշանը կարող է փոխել միայն $x = x_0 > 0$ միակ կետում: Այդ կետից աջ ամենուրեք $\alpha(x) > 0$, ուստի ընթացքի դեպքում սխալը աճում է միայն $[0, x_0]$ հատվածում:

Պարզենք, թե $\varepsilon(x)$ սխալը քանի անգամ կաճի (5) հավասարման լուծման դեպքում: Քանի որ $\varepsilon(x)$-ը բավարարում է (9) հավասարմանը՝ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ճշտությամբ, ապա $\varepsilon(x)$-ը $[0, x_0]$ հատվածում կաճի

$$\Delta = e^{-2\int_0^{x_0}\alpha dx} \qquad (12)$$

անգամ: (Եթե $x_0 > l$, ապա $\varepsilon(x)$-ը կլինի աճող ողջ $[0, l]$ հատվածում, բայց այդ աճը փոքր է Δ-ից):

Հաշվենք Δ-ի արժեքը: (8 ա)-ի համաձայն

$$\alpha = \gamma \operatorname{th}\left(\gamma x + \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right)$$

և, հետևաբար,

$$x_0 = -\frac{1}{2\gamma}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0},$$

որտեղից

$$\int_0^{x_0}\alpha dx = \int_0^{x_0}\gamma th\left(\gamma x + \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right)dx = \ln \operatorname{ch}\left(\gamma x + \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right)\Big|_0^{x_0} =$$

$$= \ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma+\alpha_0}{\gamma-\alpha_0}\right) = -\ln\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\alpha_0^2}},$$

հետևաբար

$$\Delta = e^{-2\int_0^{x_0}\alpha dx} = e^{2\ln\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\alpha_0^2}}} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2-\alpha_0^2},$$

կամ այլ կերպ՝

$$\Delta = \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_0}{\gamma}\right)^2}, (|\alpha_0| < \gamma): \qquad (13)$$

Այսպիսով, Δ-ն մեծ է, երբ $|\alpha_0| \sim \gamma$: Նկատենք նաև, որ (6) և (4) հավասարումների լուծման դեպքում սխալի աճը կարող է միայն փոքր լինել $\Delta = e^{-2\int_0^{x_0}\alpha dx}$-ից, քանի որ այստեղ այդ աճը որոշվում է $\Delta_1 = e^{-\int_0^{x_0}\alpha dx}$ մեծության արժեքով:

(13) առնչությունից կարող ենք գնահատել Δ-ն $|\alpha_0| \sim \gamma$ դեպքում: Այսպես, եթե $\alpha_0 = -0{,}95\gamma$, ապա (13)-ի համաձայն $\Delta = \frac{1}{1-(0{,}95)^2} \approx 10$: Նշանակում է, նույնիսկ α_0 և γ-ի այդքան անբարենպաստ առնչության դեպքում սխալն աճում է ընդամենը 10 անգամ: Այդ դեպքում հաշվումները բավական է տանել երկու պահուստային նիշերով. մեկ նիշը կորչում է ուղիղ ընթացքի դեպքում, մյուսը՝ հետադարձ:

Այսպիսով, $p(x) = \gamma^2 = const$ ենթադրությամբ մենք ցույց տվեցինք, որ բացասական α_0-ների համար, երբ $|\alpha_0|$-ն էապես փոքր է γ-ից, ընթացքը կայուն է:

Այժմ դիտարկենք փոփոխական $p(x)$-ի և բացասական α_0-ի դեպքը: Ապացուցենք, որ այս դեպքում ընթացքը կոռեկտ է, եթե միայն $|\alpha_0|^2$-ն փոքր է $\frac{1}{2}inf p(x)$-ի համեմատությամբ:

Նշանակենք $infp(x)=p_0$: Ինչպես և հաստատուն $p(x)=\gamma^2$ դեպքում, ընթացքի կոռեկտությունը կորչում է այն դեպքում, երբ մեծ է $\Delta(x)=e^{-2\int_0^{x_0}\alpha dx}$ մեծության մաքսիմալ արժեքը, որտեղ $\alpha(x)$-ը (5) հավասարման լուծումն է՝ $\alpha(0)=\alpha_0$ նախնական պայմանով:

Իրոք, վերևում ցույց տվեցինք, որ հենց $\Delta(x)$ մեծությունն է որոշում սխալի աճը ընթացքի դեպքում: Նշանակում է, մեզ մնում է ցույց տալ, որ $\Delta(x)$-ը մնում է փոքր: Դրա համար դիմենք (10) համակարգին: $\alpha(x)$-ը որոշվում էր (11) հավասարությունով՝ $\alpha(x)=-\frac{u(x)}{v(x)}$, որտեղ (10) համակարգի լուծումներ $u(x)$ և $v(x)$-ը բավարարում են $u(0)=-\alpha_0$, $v_0=1$ նախնական պայմաններին: Քանի որ (10)-ի երկրորդ հավասարման ուժով $u(x)=-v'(x)$, ապա օգտվելով (11) հավասարությունից՝ կարելի է ձևափոխել $\Delta(x)$-ը.

$$\Delta(x)=e^{-2\int_0^x\alpha dx}=e^{2\int_0^x\frac{u(x)}{v(x)}dx}=e^{-2\int_0^x\frac{v'(x)}{v(x)}dx}=e^{-2\ln v(x)|_0^x}=e^{\ln\left(\frac{v(x)}{v(0)}\right)^{-2}}=\left(\frac{v(0)}{v(x)}\right)^2:$$

Քանի որ (10) համակարգի նախնական պայմանների համաձայն $v_0=1$, ապա

$$\Delta(x)=\frac{1}{[v(x)]^2}: \tag{14}$$

Այսպիսով, ընթացքի կոռեկտության հարցը հանգում է $v(x)$ ֆունկցիայի ուսում-նասիրությանը: Նախ ցույց տանք, որ երբ

$$|\alpha_0|^2<\frac{1}{2}infp(x)=\frac{1}{2}p_0, \tag{15}$$

ապա $v(x)$ ֆունկցիան՝

1˚. դրական է ողջ $x\geq 0$ կիսառանցքի վրա (հետագայում առավել հարմար է համարել, որ $\alpha(x)$, $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները որոշված են բոլոր $x\geq 0$ համար: Նրանց նախորոշման համար բավական է նախորոշել $p(x)$-ը՝ $x>l$ դեպքում, ընդունելով, օրինակ, այս դեպքում $p(x)=p(l)$),

2˚. ունի միակ մինիմում՝ x_0 կետում:

Իրոք, (5) հավասարումից ունենք $\alpha'=p(x)-\alpha^2$: (15) պայմանի ուժով ամենուրեք $|\alpha|\leq|\alpha_0|$ շերտում հավասարման ուղղությունների դաշտը դրական է և բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը.

$$\alpha'\geq p_0-|\alpha|^2>2|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^2=|\alpha_0|^2: \tag{16}$$

Հետևաբար, (5) հավասարման ինտեգրալային կորը x-ի աճման դեպքում կարող է այդ շերտից դուրս գալ միայն նրա $\alpha=|\alpha_0|$ վերին եզրով:

Դա վերաբերում է նաև մեզ հետաքրքրող ինտեգրալային կորին, որի համար $\alpha(0)=\alpha_0<0$: Ավելին, (16)-ի ուժով բոլոր այն x-երի համար, որոնց դեպքում այդ ինտեգրալային կորը դեռ ընկած է այդ շերտի ներսը, տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\alpha(x)\geq\alpha_0+|\alpha_0|^2x:$$

Հետևաբար, $\alpha(x)$-ը որևէ $x_0>0$ կետում կդառնա զրո, ընդ որում՝ $x_0\leq\frac{1}{|\alpha_0|}$ և նրանից աջ կդառնա դրական:

Մենք ապացուցել ենք հետևյալ ($ա_1$) պնդումը.

եթե $\alpha(x_0)>0$, ապա $\alpha(x)>0$ բոլոր $x>x_0$ համար:

Այսպիսով, $\alpha(x)$ ֆունկցիան, որը $x=0$ համար բացասական է, աճում է, $x=x_0$

դեպքում անցնում է զրոյի վրայով և այնուհետև մնում է դրական: Քանի որ $\alpha = -\frac{u(x)}{v(x)}$, ապա $u(x)$-ը դառնում է 0 և փոխում է նշանը $x = x_0$ դեպքում, իսկ $v(x)$-ը նշանը չի փոխում: Մյուս կողմից, $u(x)$-ն ու $v(x)$-ը (10)-ի լուծումներն են, որոնք բավարարում են $u(x_0) = -\alpha_0, v(0) = 1$ նախնական պայմաններին, ուստի $v(x) > 0$ բոլոր $x \geq 0$ համար:

Ինչ վերաբերում է $u(x)$ ֆունկցիային, ապա այն դրական է $x < x_0$ դեպքում և բացասական՝ $x > x_0$ դեպքում: Իսկ քանի որ $v' = -u$, ապա x_0 կետից ձախ $v(x)$-ը ամենուրեք նվազում է, իսկ այդ կետից աջ աճում է: Այսպիսով, $v(x)$-ն ունի միակ մինիմում՝ $x = x_0$ կետում:

Քանի որ սխալի աճը ընթացքի դեպքում որոշվում է (14) հավասարությունով, ապա բոլոր դեպքերում

$$\Delta(x) \leq \frac{1}{v^2(x_0)}: \tag{14′}$$

Այսպիսով, մեզ մնում է գնահատել $v(x_0)$ արժեքը: Դրա համար ճշտենք այն x_0 արժեքը, որի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$x_0 \leq \frac{1}{|\alpha_0|}: \tag{17}$$

(10) համակարգի ուժով և $u(0) = -\alpha_0$, $v(0) = 1$ նախնական պայմանների դեպքում կունենանք

$$u(x) = |\alpha_0| - \int_0^x p(x)v(x)\,dx, \tag{18}$$

$$v(x) = 1 - \int_0^x u(x)\,dx: \tag{19}$$

$0 \leq x \leq x_0$ հատվածի վրա ամենուրեք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դրական են և նվազում են ($u' = -p \cdot v(x) < 0, v' = -u < 0$), ուստի (19)-ից կգտնենք

$$v(x) \geq 1 - u(0)\int_0^x dx = 1 - u(0)x, (0 \leq x \leq x_0)$$

իսկ քանի որ $u(0) = -\alpha_0 = |\alpha_0|$, ապա

$$v(x) \geq 1 - |\alpha_0|x, (0 \leq x \leq x_0): \tag{20}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $p(x) \geq p_0$, կարող ենք (19) և (20)-ից ստանալ (v-ն մոնոտոն նվազում է $(0 \leq x \leq x_0)$ դեպքում)

$$u(x) \geq |\alpha_0| - p_0\int_0^x 1 - |\alpha_0|x\,dx = |\alpha_0| - p_0\left(x - |\alpha_0|\frac{x^2}{2}\right), 0 \leq x \leq x_0:$$

Մասնավորապես, քանի որ $u(x_0) = 0$, ապա վերջին անհավասարությունում ընդունելով $x = x_0$, կունենանք

$$|\alpha_0| + p_0|\alpha_0|\frac{v_0^2}{2} - p_0x_0 \geq 0,$$

կամ

$$x^2 - \frac{2}{|\alpha_0|}x_0 + \frac{2}{p_0} > 0:$$

Լուծելով այս քառակուսի անհավասարությունը, կգտնենք

$$x_0 \geq \frac{1}{|\alpha_0|} + \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{2}{p_0}}$$

կամ

$$x_0 \leq \frac{1}{|\alpha_0|} - \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{2}{p_0}},$$

իսկ քանի որ ըստ (17)-ի $x_0 \leq \frac{1}{|\alpha_0|}$, ապա

$$x_0 \leq \frac{1}{|\alpha_0|} - \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{2}{p_0}}: \tag{21}$$

$v(x)$ համար ստացված (20) գնահատականի մեջ ընդունելով $x = x_0$, (21)-ի ուժով կունենանք

$$v(x_0) \geq 1 - |\alpha_0| \cdot x_0 \geq 1 - |\alpha_0| \cdot \left(\frac{1}{|\alpha_0|} - \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{2}{p_0}} \right):$$

$$v(x_0) \geq \sqrt{1 - \frac{2|\alpha_0|^2}{p_0}},$$

իսկ քանի որ ընթացքի դեպքում սխալի աճը բավարարում է (14) պայմանին, ապա

$$\Delta(x) \leq \frac{1}{v^2(x_0)} \leq \frac{1}{1 + \frac{2|\alpha_0|^2}{p_0}}:$$

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք ընթացքի կոռեկտությունը α_0 գործակցի ոչ միայն դրական, այլև որոշ բացասական արժեքների համար: α_0-ի բացասական արժեքների դեպքում ստացանք հետևյալ բավարար պայմանը.

$\alpha_0 < 0$ դեպքում ընթացքը կոռեկտ է, եթե միայն $|\alpha_0|^2$-ն փոքր է $p_0 = \frac{1}{2} inf p(x)$-ի համեմատությամբ ($p(x) = const$ դեպքում $\frac{1}{2}$ գործակիցը կարելի է դեն նետել):

Նկատենք, որ եթե նույնիսկ այդ պայմանը չի կատարվում, ընթացքը կարող է լինել կոռեկտ՝ հետադարձ ուղղությամբ, այսինքն՝ սկսվեր աջ եզրային պայմանից. $y' = \psi_0 \cdot y + \omega_0 \Big|_{x = l}$, ընդ որում՝ նրա կոռեկտությունն ապահովվում է նույն պայմաններով, բայց ոչ թե ψ_0-ի, այլ $-\psi_0$-ի վրա:

Նկարագրված մեթոդը կարող է կիրառվել նաև առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի նկատմամբ:

Դիտարկենք հետևյալ համակարգը

$$y' = py + f, \tag{22}$$

որտեղ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ և $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$-ը n-չափանի վեկտորներ են, իսկ $p(x)$-ը n-րդ կարգի մատրից է՝

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x) \tag{23}$$

իրական սեփական արժեքներով:

(23) համակարգը դիտարկենք $[0, l]$ վերջավոր հատվածում, ընդ որում ենթադրենք, որ այդ բոլոր սեփական արժեքները նշված միջակայքում պահպանում են

նշանը: Որոշակիության համար ընդունենք, որ k_1 սեփական արժեքները դրական են, իսկ $k_2 = n - k_1$-ը՝ բացասական:

$[0, l]$ հատվածի ծայրակետերում տրվում են եզրային պայմանները հետևյալ տիպի

$$(\alpha_0, y)\Big| \quad = \beta_0\Big| \tag{24}$$

որտեղ α_0-ն n-չափանի վեկտոր է, իսկ β_0-ն թիվ է: Այդպիսի պայմանները տրվում են n հատ՝ k_1-ը ձախ ծայրակետում, $k_2 = n - k_1$-ը՝ աջ (համապատասխանում են դրական և բացասական սեփական արժեքների թվերին):

Դիտարկենք (24) պայմաններից որևէ մեկը՝ տրված, օրինակ, ձախ ծայրակետում: Հատվածի յուրաքանչյուր x կետում կառաջանա $\big(\alpha(x), y(x)\big) = \beta(x)$ տեսքի առնչություն: Որպեսզի գտնենք $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ ֆունկցիաներով բավարարվող հավասարումները, ածանցենք վերջին հավասարությունը.

$$(\alpha', y) + (\alpha, y') = \beta':$$

Օգտվելով (22) առնչությունից, արտաքսենք y'-ը.

$$(\alpha', y) + (\alpha, py + f) = \beta'$$

կամ

$$(\alpha' + p'\alpha, y) + (\alpha, f) = \beta',$$

որտեղ p'-ը p-ի տրանսպոնացված մատրիցն է:

Այսպիսով, α և β-ի որոշման համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումները

$$\alpha' + p'\alpha = 0 \tag{25}$$

$$\beta' = (\alpha, f) \tag{26}$$

$\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$ նախնական պայմաններով: Ունենալով $\alpha(x)$ և $\beta(x)$-ը՝ կգտնենք $y(x)$-ը հետևյալ առնչությունից

$$\big(\alpha(x), y(x)\big) = \beta(x):$$

Այդպիսի առնչություններ կունենանք եզրային պայմանների n թվով: Ֆիքսված x-ի համար այդ առնչությունները իրենցից կներկայացնեն n թվով հանրահաշվական հավասարումների համակարգ, որի լուծումից էլ կգտնենք $y(x)$-ը:

Պարզ է, որ նկարագրած եղանակը կոռեկտ է, եթե ձախ եզրային պայմաններից մեկին համապատասխանող յուրաքանչյուր α վեկտոր ընկած է $p'(0)$ մատրիցի դրական սեփական արժեքների ենթատարածությունում, իսկ աջ եզրային պայմաններից մեկին համապատասխանող յուրաքանչյուր α վեկտոր ընկած է $p'(l)$ մատրիցի բացասական սեփական արժեքների ենթատարածությունում:

Իրոք, այս դեպքում (25) հավասարումներից յուրաքանչյուրը ինտեգրվում է լուծման նվազման կողմում:

Ինչ վերաբերում է β-ն որոշելուն, ապա այստեղ $\delta\beta(x)$ սխալը ուղղակիորեն հավասար է $\int_0^x \delta(\alpha, f)dx$ (աջ եզրում պայմանի դեպքում՝ $\int_0^l \delta(\alpha, f)dx$):

Եզրակացություն

Ներկայացված աշխատանքում քննարկվել է երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների եզրային խնդիրների թվային ինտեգրման մի մեթոդ, որը հիմնված է ոչ ստանդարտ եզրային պայմաններով խնդիրները տարբերական սխեմաներով լուծելու սկզբունքի վրա: Ավագ ածանցյալին առընթեր փոքր պարամետրի դեպ-

քում հանգում էինք ճշգրտության կտրուկ կորստի: Առաջարկվող մեթոդը զերծ է այդ թերությունից՝ եզրային պայմանը տարածվում է ելակետային ինտերվալի բոլոր կետերում (ուղիղ ընթացք), ուստի այն կարող է հաջողությամբ կիրառվել հաշվողական պրակտիկայում: Ապացուցվել է նաև ընթացքի կոռեկտությունը: Նկարագրված մեթոդը կիրառելի է նաև առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի նկատմամբ:

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-2025.2-95

Գրականություն

1. Гельфанд А. В. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Известия АН, 1938, с. 583-594.
2. Пономарев К. К. Специальный курс высшей математики, глава V, Москва, 1974.
3. Прокуратова О. Н., Пышьева А. В. Метод прогонки решения краевой задачи для ОДУ второго порядка. Наука и современность. Елецкий гос. университет им. И.А.Бунина, 2013.
4. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач, Москва, 1956.

Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений

Саакян Роберт,
Енокян Роберт

Резюме

Ключевые слова: *разностные уравнения, расчетная сетка, прямая прогонка, обратная прогонка, корректность, система уравнений*

В работе рассматривается граничная задача линейного дифференциального уравнения, где граничные условия недостаточны для нахождения решения y(x), стартуя с некоторого конца интервала. Поэтому обычно правое граничное условие заменяют некоторым условием на левом конце, находят решение, удовлетворяющее уравнению и левому граничному условию, но не удовлетворяющее правому условию, а затем решение корректируется. Однако этот метод приводит к резкой потере точности.

В предлагаемой работе представлен метод прямой и обратной прогонки, позволяющий избежать накопления вычислительных ошибок. Метод заключается в распространении граничного условия, заданного на левом конце, вдоль всего расчетного интервала, что обеспечивает устойчивость и корректность решения. Доказана корректность метода в частном случае постоянного коэффициента, а также показано, что аналогичные свойства сохраняются и при переменных коэффициентах.

Предложенный алгоритм легко реализуется на компьютере и позволяет получать высокоточные решения при минимальных вычислительных затратах. Метод может быть использован при решении широкого класса линейных и квазилинейных граничных задач, в том числе в задачах теплопроводности, механики сплошной среды и математической физики.

On a Method for the Numerical Integration of Differential Equations

Sahakyan Robert,
Yenokyan Robert

Summary

Key words: *difference equations, computational grid, forward sweep, backward sweep, correctness, system of equations*

This paper examines a boundary value problem for a linear differential equation where the boundary conditions are insufficient to determine the solution y(x) starting from one end of the interval. Typically, the right boundary condition is replaced by an auxiliary condition at the left end, and a solution is found that satisfies the equation and the left boundary condition but not the right one; the solution is then adjusted. However, this conventional approach often leads to a significant loss of accuracy.

The proposed study introduces the forward and backward sweep method, which avoids the accumulation of computational errors. The essence of the method lies in propagating the boundary condition, specified at the left end, throughout the computational interval, thus ensuring the stability and correctness of the solution. The correctness of the method is proven for the case of constant coefficients, and it is shown that similar properties hold for variable coefficients as well.

The proposed algorithm is easy to implement computationally and provides highly accurate solutions with minimal computational cost. The method can be applied to a wide range of linear and quasi-linear boundary value problems, including problems of heat conduction, continuum mechanics, and mathematical physics.

Ներկայացվել է 14. 10. 2025 թ.
Գրախոսվել է 03. 11. 2025 թ
Ընդունվել է տպագրության 26. 11. 2025 թ.