UDC - 530.145.81

Модель $SU(2)$ монополь Янга-Кулона

Петросян Мара
Арзуманян Силва
Григорян Сусанна

Ключевые слова: *суперинтегрируемые системы, уравнение Шредингера, преобразования Гурвица, изотроп осциллятор, оператор Лапласа, тензор поля*

1. Кулон-осцилляторная аналогия

Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера для D-мерного ($D \geq 2$) изотропного осциллятора

$$\frac{d^2 R}{d u^2}+\frac{D-1}{u}\frac{d R}{d u}-\frac{L(L+D-2)}{u^2}R+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(E-\frac{\mu_0\,\omega^2 u^2}{2}\right)R=0, \qquad (1)$$

где R - радиальная часть волновой функции D-мерного изотропного осциллятора, а $L=0,1,2,\ldots$ – собственные значения оператора глобального момента.

После подстановки $r=u^2$ уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{d^2 R}{d r^2}+\frac{d-1}{r}\frac{d R}{d r}-\frac{l(l+d-2)}{r^2}R+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)R=0, \qquad (2)$$

где $d=\dfrac{D}{2}+1, \quad l=\dfrac{L}{2}$, а

$$\varepsilon=-\frac{\mu_0\,\omega^2}{8}, \quad \alpha=\frac{E}{4}. \qquad (3)$$

Это весьма неожиданный результат. Если $D=2,4,6,8,\ldots,$ то $d=2,3,4,5,\ldots,$ то уравнение (2) по форме совпадает с радиальным уравнением d-мерной задачи Кеплера-Кулона. При нечетных $D\geq 2$ величина d пробегает полуцелые значения и поэтому не может иметь смысл размерности пространства в общепринятом понимании. Далее, l принимает не только целые, но и полуцелые значения, а это значит, что l имеет смысл полного момента и возникает вопрос о том, откуда берется фермионная степень свободы. На этот вопрос мы дадим ответ чуть позднее. Наконец, как отмечалось выше, уравнения (1) и (2) дуальны друг к другу, а преобразованием дуальности является преобразование $r = u^2$.

Выше речь шла лишь о радиальной части волновой функции изотропного осциллятора. При переходе к самому уравнению Шредингера мы должны рассмотреть наряду с радиальным уравнением также уравнение, связанное с угловыми переменными. В этом смысле, преобразование дуальности должно включить в себя также преобразование угловых переменных. Если замену $r = u^2$ трактовать как механизм генерации электрического заряда, то (как мы убедимся в дальнейшем) с преобразованием угловых переменных связан механизм генерации магнитных зарядов.

Условие $r = u^2$ в декартовых координатах имеет вид,

$$\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{d-1}^2} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_{D-1}^2 , \tag{4}$$

который называют тождеством Эйлера. Согласно теореме Гурвица [8, 1868-1872], если $x_i \ (i = 0, 1, \ldots, d-1)$ есть билинейная комбинация $u_\mu \ (\mu = 0, 1, \ldots, D-1)$, то тождество Эйлера (4) справедлива только для следующих пар чисел:

$$(D, d) = (1, 1), \ (2, 2), \ (4, 3), \ (8, 5).$$

Преобразование $(D, d) = (1, 1)$ связывает задачу линейного осциллятора с задачей одномерного кулоновского аниона [19, 597-622; 20, 320-328; 12, 422-439].

Преобразование $(D, d) = (2, 2)$ есть известное из небесний механики преобразование Леви-Чивита [14, 411-417]. Это преобразование есть преобразование дуальности, которое задачу кругового осциллятора переводит в задачу двумерного аниона [17, 1605-1610; 15, 5-7; 18, 1868-1872].

Далее, преобразование, соответствующее паре чисел $(D, d) = (4, 3)$ в небесной механике называют преобразованием Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование)[13, 204-219].

KS-преобразование переводит задачу четырехмерного изотропного осциллятора в систему МИК-Кеплер [10, 4083-4104; 3, 962-966]. Суперинтегрируемая система МИК-Кеплера является обобщением задачи Кеплера-Кулона в присутствие монополя Дирака и была рассмотрена с разных точек зрения в работах [11, 1088-1092; 9, 1073-1091; 4, 121-128].

Наконец, преобразование Гурвица, которое соответствует случаю

$(D, d) = (8, 5)$, переводит задачу о восьмимерном изотропном осцилляторе в пятимерную задачу Кеплера-Кулона [6, 6121-6125; 2, 78-86]. Преобразование Гурвица, согласно работе [6, 6121-6125], можно представить в следующем виде

$$X = H(u;8)U, \tag{5}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}, H(u;8) = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & -u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7 \\ u_4 & u_5 & -u_6 & -u_7 & u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_5 & -u_4 & u_7 & -u_6 & -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_6 & u_7 & u_4 & u_5 & u_2 & u_3 & u_0 & u_1 \\ u_7 & -u_6 & -u_5 & u_4 & u_3 & -u_2 & -u_1 & u_0 \\ u_1 & -u_0 & u_3 & -u_2 & u_5 & -u_4 & u_7 & -u_6 \\ u_2 & -u_3 & -u_0 & u_1 & -u_6 & u_7 & u_4 & -u_5 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & -u_0 & -u_7 & -u_6 & u_5 & u_4 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрица $H(u;8)$ отличается от известной в математике матрицы Кели [5, 131-137] лишь перестановкой строк. Легко проверить, что для матрицы $H(u;8)$ имеет место условие

$$H_{\mu\lambda}\, H^T_{\lambda\nu} = u^2\, \delta_{\mu\nu}, \tag{7}$$

гарантирующее соблюдение тождества Эйлера.

Из уравнения (5), с учетом соотношений (6), преобразование Гурвица можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2, \\ x_1 &= 2(u_0 u_4 + u_1 u_5 - u_2 u_6 - u_3 u_7), \\ x_2 &= 2(u_0 u_5 - u_1 u_4 + u_2 u_7 - u_3 u_6), \\ x_3 &= 2(u_0 u_6 + u_1 u_7 + u_2 u_4 + u_3 u_5), \\ x_4 &= 2(u_0 u_7 - u_1 u_6 - u_2 u_5 + u_3 u_4). \end{aligned} \tag{8}$$

Подчеркнем, что каждому элементу в IR^5 соответствует не один элемент, а целое множество элементов в IR^8, называемое слоем. В этом и состоит свойство небиективности преобразования $IR^8(\vec{u}) \to IR^5(\vec{x})$.

Таким образом небиективное преобразование Гурвица

$IR^8(\vec{u}) \to IR^5(\vec{x})$ устанавливает связь между задачей восьмимерного изитропного осциллятора и пятимерной системы Кеплера-Кулона. Возникает очень простой вопрос, а в какую систему будет переводить биективное, т.е. взаимооднозначное, $IR^8(\vec{u}) \leftrightarrow IR^5(\vec{x})$, преобразование Гурвица, которое можно сконструировать дополнением соотношений (8) дополнительными тремя координатами. Эту проблему мы будем исследовать в следующем параграфе.

2. $SU(2)$ монополь Янга-Кулона

Как и обещали в конце предыдущего параграфа, здесь мы выясним в какую систему переводит задачу восьмимерного изотропного осциллятора биективное, билинейное преобразовзние, которое получается добавлением к преобразованию Гурвица (8) трех углов, не зависящие от координат x_j пространства $IR^5(\vec{x})$.

Следуя работе [7, 3021-3030] эти углы выбирем следующим образом:

$$\alpha_T = \frac{i}{2} \ln \frac{(u_4 - i u_5)(u_6 + i u_7)}{(u_4 + i u_5)(u_6 - i u_7)} \in [0, 2\pi),$$

$$\beta_T = 2 \arctan \left(\frac{u_4^2 + u_5^2}{u_6^2 + u_7^2} \right)^{\frac{1}{2}} \in [0, \pi], \tag{9}$$

$$\gamma_T = \frac{i}{2} \ln \frac{(u_4 + i u_5)(u_6 + i u_7)}{(u_4 - i u_5)(u_6 \_ i u_7)} \in [0, 4\pi).$$

Добавление углов (9) к преобразованиям (8) фактически означает, что мы получаем преобразование, которое пространство $IR^8(\vec{u})$ переводит в прямое произведение $IR^5 \otimes S^3$ пространства $IR^5(\vec{x})$ и $S^3(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$.

Для полноты дальнейшего изложения здесь приведем некоторые полезные формулы.

Вначале напишем как координаты u_μ $(\mu = 0,1,\ldots,7)$ выражаются через координаты x_j $(j = 0,1,\ldots,4)$ и α_T, β_T, γ_T.

$$u_0 + i u_1 = \frac{1}{\sqrt{2(r-x_0)}} \cdot$$

$$\cdot \left[(x_1 - i x_2) \sin \frac{\beta_T}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)} + (x_3 - i x_4) \cos \frac{\beta_T}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)} \right],$$

$$u_2 + i u_3 = \frac{1}{\sqrt{2(r-x_0)}} \cdot$$

$$\cdot \left[-(x_1 + i x_2) \cos \frac{\beta_T}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)} + (x_3 + i x_4) \sin \frac{\beta_T}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)} \right],$$

$$u_4 + i u_5 = \sqrt{\frac{r - x_0}{2}} \sin \frac{\beta_T}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)},$$

$$u_6 + i u_7 = \sqrt{\frac{r - x_0}{2}} \cos \frac{\beta_T}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)}.$$

Теперь пользуясь определением метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\nu},$$

где $\mu, \nu = 0, 2, \ldots, 7$, а $x_5 = \alpha_T$, $x_6 = \beta_T$, $x_7 = \gamma_T$, для ковариантных и контравариантных компонент метрического терзора получим выражения

$$g_{0\mu} = \frac{1}{4r} \delta_{0\mu}, \quad g_{i\mu} = \sum_{k=1}^{4} g_{ik} \delta_{k\mu} + \sum_{a=5}^{7} g_{ia} \delta_{ka}, \quad g_{ik} = \frac{2r(r-x_0) - x_i x_k}{4r(r-x_0)^2},$$

$$g_{5\mu} = \frac{4}{r-x_0}\left(x_2 \delta_{1\mu} - x_1 \delta_{2\mu} - x_4 \delta_{3\mu} + x_3 \delta_{4\mu}\right) + \frac{r}{4}\left(\delta_{5\mu} + \delta_{7\mu} \cos \beta_T\right),$$

$$g_{6\mu} = \frac{1}{4(r-x_0)}\left[-(x_3 \cos\alpha_T - x_4 \sin\alpha_T)\delta_{1\mu} - (x_3 \sin\alpha_T + x_4 \cos\alpha_T)\delta_{2\mu} + \right.$$

$$\left. + (x_1 \cos\alpha_T + x_2 \sin\alpha_T)\delta_{3\mu} - (x_1 \sin\alpha_T - x_2 \cos\alpha_T)\delta_{4\mu}\right],$$

$$g_{7\mu}=\frac{\cos\beta_T}{4(r-x_0)}\{[x_2-(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T)tg\beta_T]\delta_{1\mu}-$$
$$-[x_1-(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T)tg\beta_T]\delta_{2\mu}-$$
$$-[x_4-(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T)tg\,\beta_T]\delta_{3\mu}+$$
$$+[x_3+(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T)tg\,\beta_T]\delta_{4\mu}\},$$

$$g^{i\mu}=4r\,\delta^{i\mu}+\sum_{a=5}^{7}g^{ia}\,\delta^{a\mu},$$

$$g^{5\mu}=\frac{4}{r-x_0}\{[-x_2+(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T)ctg\,\beta_T]\delta^{1\mu}+$$
$$+[x_1+(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T)ctg\,\beta_T]\delta^{2\mu}+$$
$$+[x_4+(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T)ctg\,\beta_T]\delta^{3\mu}-$$
$$-[x_3-(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T)ctg\,\beta_T]\delta^{4\mu}\},$$
$$g^{6\mu}=\frac{4}{r-x_0}\Big[(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T)\delta^{1\mu}+(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T)\delta^{2\mu}-$$
$$-(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T)\delta^{3\mu}+(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T)\delta^{4\mu}\Big],$$
$$g^{7\mu}=\frac{4}{(r-x_0)\sin\beta_T}\Big[(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T)\delta^{1\mu}-$$
$$-(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T)\delta^{2\mu}-(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T)\delta^{3\mu}-$$
$$-(x_1\cos\alpha_T+x_4\sin\alpha_T)\delta^{4\mu}\Big].$$

Детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$ имеет вид

$$g=\det g_{\mu\nu}=\frac{\sin^2\beta_T}{65536r^2},\qquad \sqrt{g}=\frac{\sin\beta_T}{256r}.$$

Теперь пользуясь приведенными выше формулами и определением оператора Лапласа

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}\;g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right),$$

где $\mu,\ \nu=0,\ 1,\ldots,\ 7,\ g^{\mu\nu}$ – контравариантные компоненты метрического тензора, g – детерминант метричского тензора $g_{\mu\nu}$, восьмимерный оператор Лапласа в координатах $x_j \left(j=0,1,\ldots,4\right)$ и α_T, β_T, γ_T запишется в следующем виде

$$\Delta_8 = 4\, r \left(\Delta_5 - 2\, i\, A_j^{a(+)}\, \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial\, x_j} - \frac{2}{r\left(r-x_0\right)} \hat{T}^2 \right). \tag{10}$$

Здесь $r=\left(x_i\ x_i\right)^{1/2}=u^2$, а операторы $\hat{T}_a \ \left(a=1,2,3\right)$ есть генераторы группы $SU\left(2\right)$ и имеют вид (см. например [1])

$$\hat{T}_1 = i\left(\cos\alpha_T\ \cot\beta_T \frac{\partial}{\partial\alpha_T} + \sin\alpha_T \frac{\partial}{\partial\,\beta_T} - \frac{\cos\alpha_T}{\sin\beta_T}\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T} \right),$$

$$\hat{T}_2 = i\left(\sin\alpha_T\ \cot\beta_T \frac{\partial}{\partial\alpha_T} - \cos\alpha_T \frac{\partial}{\partial\,\beta_T} - \frac{\sin\alpha_T}{\sin\beta_T}\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T} \right), \tag{11}$$

$$\hat{T}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\,\alpha_T}, \qquad \hat{T}_{3'} = -i\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T}.$$

Триплет пяримерных векторов $\vec{A}^{a(+)}$ имеет вид

$$\vec{A}^{1(+)} = \frac{1}{r\left(r-x_0\right)}\left(0,-x_4\,,x_3\,,-x_2\,,x_1\right),$$

$$\vec{A}^{2(+)} = \frac{1}{r\left(r-x_0\right)}\left(0,-x_3\,,-x_4\,,x_1\,,x_2\right), \tag{12}$$

$$\vec{A}^{3(+)} = \frac{1}{r\left(r-x_0\right)}\left(0,\,x_2\,,-x_1\,,-x_4\,,x_3\right).$$

Легко заметить, что векторы $\vec{A}^{a(+)}$ ортогональны как друг к другу

$$A_j^{a(+)}\ A_j^{b(+)} = \frac{r+x_0}{r^2\left(r-x_0\right)}\,\delta_{a\,b}\,, \tag{13}$$

так и к радиус-вектору $\vec{r}=\left(x_0\,,x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4\right)$.

Теперь пользуясь формулой (10) и условием ортогональности (13) уравнение Шредингера для восьмимерного изотропного осциллятора

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\,\mu_0}\Delta_8 + \frac{\mu_0\,\omega^2\,u^2}{2} \right)\psi\left(\vec{u}\right) = E\,\psi\left(\vec{u}\right) \tag{14}$$

можем записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\,\mu_0}\left(-i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x_j}-\hbar\,A_j^{a(+)}\,\hat{T}_a\right)^2\psi+\frac{\hbar^2}{2\,\mu_0\,r^2}\,\hat{T}^2\,\psi-\frac{e^2}{r}\,\psi=\varepsilon\,\psi\,, \tag{15}$$

где $\varepsilon=-\mu_0\,\omega^2/8$, а $e^2=E/4$.

Таким образом мы получили уравнение, тождественное уравнению Паули, и по этому триплету пятимерных векторов $\vec{A}^{a(+)}$ мы можем придать смысл вектор-потенциалов с осью сингулярностью, направленной вдоль положительной части оси x_0.

Для дальнейшего удобно записать вектор-потенциалы $\vec{A}^{a(+)}$ в следующем виде:

$$A_i^{a(+)}=\frac{2\,i}{r\,(r-x_0)}\,\tau_{i\,j}^{a}\,x_j\,. \tag{16}$$

Здесь τ^a это 5×5 матрицы и имеют вид

$$\tau^1=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0\end{pmatrix},\ \tau^2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix},\ \tau^3=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Для τ^a матриц имеют место следующие соотношения:

$$\left[\tau^a,\tau^b\right]=i\,\varepsilon_{a\,b\,c}\,\tau^c\,,\quad \left\{\tau^a\,,\tau^b\right\}=\frac{1}{2}\,\delta_{a\,b}\,,$$
$$4\,\tau_{i\,j}^{a}\,\tau_{j\,k}^{b}=\delta_{a\,b}\left(\delta_{i\,k}-\delta_{i\,0}\,\delta_{k\,0}\right)+2\,i\,\varepsilon_{a\,b\,c}\,\tau^c\,, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a\,b\,c}\,\tau_{i\,j}^{b}\,\tau_{j\,m}^{c}=\frac{i}{2}\Big[&\left(\delta_{i\,0}\,\delta_{k\,0}-\delta_{i\,k}\right)\tau_{j\,m}^{a}-\left(\delta_{i\,0}\,\delta_{m\,0}-\delta_{i\,m}\right)\tau_{j\,k}^{a}+\\&+\left(\delta_{j\,0}\,\delta_{m\,0}-\delta_{j\,m}\right)\tau_{i\,k}^{a}-\left(\delta_{j\,0}\,\delta_{k\,0}-\delta_{j\,k}\right)\tau_{i\,m}^{a}\Big].\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь скобки $[\,,\,]$ и $\{\,,\,\}$ означают коммутатор и антикоммутатор, соответственно.

Теперь нам надо выяснить какую систему описывает уравнение (15). Для этого мы должны знать топологический заряд, создающий поле, описываемое триплетом вектор-потенциалов (12). Чтобы вычислить значение топологического заряда необходимо знать явный вид тензора поля. Пользуясь определением тензора поля Янга-Милса

$$F_{i\,k}^{a(+)} = \frac{\partial\, A_k^{a(+)}}{\partial\, x_i} - \frac{\partial\, A_i^{a(+)}}{\partial\, x_k} + \varepsilon_{a\,b\,c}\, A_i^{b(+)}\, A_k^{c(+)}$$

и соотношениями (16), (18) получим

$$F_{i\,k}^{a(+)} = \frac{1}{r^2}\left[\left(x_k + r\,\delta_{k\,0}\right)A_i^{a(+)} - \left(x_i + r\,\delta_{i\,0}\right)A_k^{a(+)} - 2\,i\,\tau_{i\,k}^{a}\right]. \qquad (19)$$

Теперь учитывая условие ортогональности $x_i\; A_i^{a(+)} = 0$ и явный вид тензора поля (19) легко показать, что $x_i\; F_{ik}^{a(+)} = 0$, т.е. как и вектор-потенциал, так и тензор поля ортогонален радиус-вектору частицы.

Отметим также, что из соотношений (13), (16), (17) и (19) следует, что

$$F_{i\,j}^{a(+)}\; F_{jk}^{b(+)} = \frac{1}{r^6}\left(x_i\; x_k - r^2\;\delta_{i\,k}\right)\delta_{ab} + \frac{1}{r^2}\,\varepsilon_{abc}\; F_{ik}^{c(+)},$$

или

$$F_{ik}^{a(+)}\; F_{ik}^{b(+)} = \frac{4}{r^2}\,\delta_{ab}. \qquad (20)$$

Из потенциалов $\vec{A}^{a(+)}$ с помощью калибровочного преобразования

$$B_j^{(+)} = S_+\; A_j^{(+)}\; S_+^{-1} + i\, S_+\,\frac{\partial S_+^{-1}}{\partial\, x_j},$$

где $A_j^{(+)} = A_j^{a(+)}\,\hat{T}_a$, $\quad B_j^{(+)} = B_j^{a(+)}\,\hat{T}_a$, а

$$S_+ = e^{i\,\alpha\,T_3}\; e^{i\,\beta\,T_2}\; e^{i\,\gamma\,T_3}, \qquad (21)$$

Можно сконструировать потециалы $B_j^{a(+)}$, сингулярность которых направлена вдоль отрицательной части оси x_0 и они имеют вид

$$\vec{B}^{1(+)} = \frac{1}{r\left(r + x_0\right)}\left(0,\, x_4\,,\, x_3\,,\, -x_2\,,\, -x_1\right),$$

$$\vec{B}^{2(+)} = \frac{1}{r\left(r + x_0\right)}\left(0,\, -x_3\,,\, x_4\,,\, x_1\,,\, -x_2\right), \qquad (22)$$

$$\vec{B}^{3(+)} = \frac{1}{r\left(r + x_0\right)}\left(0,\, x_2\,,\, -x_1\,,\, -x_4\,,\, -x_3\right).$$

Эйлеровы углы α, β и γ в (21) определены следующим образом:

$$\alpha = \frac{i}{2} \ln \frac{(x_2 - i\,x_1)(x_4 - i\,x_3)}{(x_2 + i\,x_1)(x_4 + i\,x_3)} \in [0,\, 2\pi),$$

$$\beta = 2\arctan\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2}\right)^{\frac{1}{2}} \in [0,\, \pi], \qquad (23)$$

$$\gamma = \frac{i}{2} \ln \frac{(x_2 + i\,x_1)(x_4 - i\,x_3)}{(x_2 - i\,x_1)(x_4 + i\,x_3)} \in [0,\, 4\pi).$$

Тензор поля для векторного потенциала $B_j^{a(+)}$ обозначим через $\tilde{F}_{ij}^{a(+)}$.

Теперь зная явный вид тензора поля и его некоторые свойства, вычислим топологический заряд являющимся источником поля описываемое тензором $F_{ij}^{a(+)}$. Вычисление величины топологического заряда удобно произвести в пятимерных гиперсферических координатах, которые определим следующим образом:

$$x_0 = r\cos\theta\,,$$

$$x_2 + i\,x_1 = r\sin\theta\sin\frac{\beta}{2}\,e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,, \qquad (24)$$

$$x_4 + i\,x_3 = r\sin\theta\cos\frac{\beta}{2}\,e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\,.$$

Здесь $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [o, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\gamma \in [0, 4\pi)$.

Прямые вычисления показывают, что все $F_{rk}^{a(+)} \equiv 0$, где $k = r, \theta, \alpha, \beta, \gamma$, а остальные компоненты имеют вид

$$F_{\theta\beta}^{1(+)} = -\frac{1}{2}\sin\theta\sin\gamma, \quad F_{\theta\alpha}^{1(+)} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\cos\gamma, \quad F_{\theta\gamma}^{1(+)} = 0,$$

$$F_{\beta\alpha}^{1(+)} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\cos\alpha, \quad F_{\beta\gamma}^{1(+)} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\gamma\,,$$

$$F_{\alpha\gamma}^{1(+)} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\sin\gamma.$$

$$F^{2(+)}_{\theta\beta}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\gamma,\quad F^{2(+)}_{\theta\alpha}=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\sin\gamma,\quad F^{2(+)}_{\theta\gamma}=0,$$

$$F^{2(+)}_{\beta\alpha}=-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\sin\lambda,\quad F^{2(+)}_{\beta\gamma}=-\frac{1}{4}\sin^2\theta\ \sin\gamma,$$

$$F^{2(+)}_{\alpha\gamma}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\cos\gamma.$$

$$F^{3(+)}_{\theta\beta}=F^{3(+)}_{\beta\gamma}=F^{3(+)}_{\alpha\gamma}=0,\quad F^{3(+)}_{\theta\alpha}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta,$$

$$F^{3(+)}_{\theta\gamma}=\frac{1}{2}\sin\theta\ ,\quad F^{3(+)}_{\beta\alpha}=-\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\beta.$$

Соответствующие компоненты тензора $\tilde{F}^{a(+)}_{i\,j}$ имеют вид

$$\tilde{F}^{1(+)}_{\theta\beta}=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\alpha,\quad \tilde{F}^{1(+)}_{\theta\alpha}=0,\quad \tilde{F}^{1(+)}_{\theta\gamma}=-\frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\cos\alpha,$$

$$\tilde{F}^{1(+)}_{\beta\alpha}=-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\alpha,\quad \tilde{F}^{1(+)}_{\beta\gamma}=-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\cos\alpha,$$

$$\tilde{F}^{1(+)}_{\alpha\gamma}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\sin\alpha.$$

$$\tilde{F}^{2(+)}_{\theta\beta}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\alpha,\quad \tilde{F}^{2(+)}_{\theta\alpha}=0,\quad \tilde{F}^{2(+)}_{\theta\gamma}=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\sin\alpha,$$

$$\tilde{F}^{2(+)}_{\beta\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\alpha,\quad \tilde{F}^{2(+)}_{\beta\gamma}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\sin\alpha,$$

$$\tilde{F}^{2(+)}_{\alpha\gamma}=\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\cos\alpha.$$

$$\tilde{F}^{3(+)}_{\theta\beta}=\tilde{F}^{3(+)}_{\beta\alpha}=\tilde{F}^{3(+)}_{\alpha\gamma}=0,\quad \tilde{F}^{3(+)}_{\theta\alpha}=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad \tilde{F}^{3(+)}_{\theta\gamma}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta,$$

$$\tilde{F}^{3(+)}_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\beta.$$

Теперь пользуясь определением дуального тензора

$$^{*}f^{\mu\nu}=\frac{\sqrt{g}}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\ f_{\lambda\sigma},$$

где $\varepsilon^{1\,2\,3\,4}=1$, g -детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$, и точными выражениями гиперсферических компонентов тензора $F^{a(+)i\,j}$, получим, что $F^{a(+)i\,j}$ самодуальный тензор, т.е.

$$ {}^{*}F^{a(+)ij} = F^{a(+)ij} . \tag{25} $$

Далее, ползуясь определением топологического заряда

$$ q = \frac{1}{32\pi^2} \oint {}^{*}F^{a(+)ij} \, F_{ij}^{a(+)} \, dS , $$

где

$$ dS = \frac{r^4}{8} \sin^3\theta \sin\beta \, d\theta \, d\beta \, d\alpha \, d\gamma $$

есть дифференциальный элемент поверхности четырехмерной сферы вложенная в пятимерное пространство, и учитывая уравнение самодуальности (25) получим, что в нашем случае значение топологического заряда $q = +1$ [16, 99-108].

Таким образом, уравнение (15) описывает систему состоящую из заряженной частицы и $SU(2)$ монополя Янга [6, 6121-6125] с топологическим зарядом $q = +1$, которую принято называть $SU(2)$ монополем Янга-Кулона [20, 320-328].

Здесь также отметим, что в работе [3, 962-966] Янг доказал, что расширение $U(1)$ монополя Дирака на группу $SU(2)$ возможно лишь только в пятимерном пространстве, и, что при этом, в отличие от монополя Дирака, $SU(2)$ монополь имеет топологический заряд $q = \pm 1$.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. т. 1, Наука, Москва, 1965, 296 с.
2. Караян Х.Г., Мардоян Л.Г., Тер-Антонян В.М.. *Кулон-осцилляторная дуальность и 5-мерная задача Кулона*. Изв. НАН Армении, Физика, 38, 2003, с. 78-86.
3. Прись И.Е., Толкачев Е.А.. *Атом Диогена как четырехмерный изотропный осциллятор со связью*. ЯФ, 54, 1991, с. 962-966.
4. Bellucci S., Nersessian A.. *(Super)Oscillator on CP(N) and Costant Magnetic Field*. Phys. Rev., D67, 2003,065013, pp. 121-128.
5. Camboa J., Zanelli J. *Anyons in* $1+1$ *dddimensions*. Phys. Lett., B357, 1995, pp. 131-137.
6. Davtyan L.S., Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.. *Generalized KS-transformation: from five-dimensional*

hydrogen atom to eight-dimensional isotropic oscillator. J. Phys., A20, 1987, pp. 6121-6125.
7. Hoang Le Van, Viloria Tony J., Thu Le anh. *On the hydrogen-like atom in five-dimensional space*. J. Phys., A24, 1991, pp. 3021-3030.
8. Hurwitz A. *Über die Zahlenthorie der Quaternionen*. Narch. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. K1, 1896, pp. 313-340.
9. Inomata A., Junker G., Wilson R.. *Topological charge quantization via path integration: An zpplication of the Kustaanheimo-Stiefel transformation*. Found. Phys., 23, 1993, pp. 1073-1091.
10. Iwai T., Uwano Y. *The quantized MIC-Kepler problem and its symmetry group for negative energies*. J. Phys., A21, 1988, pp 4083-4104.
11. Iwai T.. *The symmetry group of the harmonic oscillator and its reduction*. J. Math. Phys., 23, 1982, pp.1088-1092.
12. Kibler M. and Grenet G. *On the* SU_2 *unit tensor*. J. Math. Phys., 21, 1980, pp. 422-439.
13. Kustaanheimo P., Stiefel E. *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularizations*. J. Reine Angew. Math., 218, 1965, pp. 204-219.
14. Levi-Civita T. *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*. Opere Mathematiche, Memorie e note 2, 1901-1907, Nicola Zanicheli Editore, bologna, 1956, pp. 411-417.
15. Maghakian A., Sissakian A.N. and Ter-Antonyan V.. *Electromagnetic duality for anyons*. Phys. Lett., A236, 1997, pp. 5-7.
16. Mardoyan L.G.. *Dyon-Oscillator Duality. Hidden Symmetry of the Yang-Coulomb Monopole*. CRM Proceedings and Lecture Notes “Superintegrability in Classical and Quantum Systems”, 37, 99-108, 2004; quant-ph/0302162.
17. Nersessian A., Ter-Antonyan V., Tsulaia M.M. *A note on Bohlin transformation*. Mod. Phys. Lett., A11, 1996, pp. 1605-1610.
18. Nersessian A., Ter-Antonyan V. *Anyons, monopole and Coulomb problem*. ЯФ, 61, 1998, pp. 1868-1872.
19. Polichronakos A.P. *Non-relativistic bosonization and fractional statistics*. Nucl. Phys., B324, 1989, pp. 597-622.
20. Yang C.N. *Generalization of Dirac's monopole to* SU_2 *gauge fields*. J. Math. Phys., 19, 1978, pp. 320-328.

Յանգ-Կուլոնի $SU(2)$ մոնոպոլի մոդելը

Պետրոսյան Մարա
Արզումանյան Միլվա
Գրիգորյան Սուսաննա

Ամփոփում

Հանգուցային բառեր. *սուպերինտեգրվող համակարգեր, Շրյոդինգերի հավասարում, Հուրվիցի ձևափոխություն, իզոտրոպ օսցիլյատոր, Լապլասի օպերատոր, դաշտի տենզոր*

Մոնոպոլների գեներացման խնդիրը ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի շրջանակներում վիտենյան երկակիության որոնման ավելի ընդհանուր խնդրի մի մասն է: Մոնոպոլների և դիոնների գեներացման մեկնարկային կետը Հուրվիցի ոչ բիեկտիվ ձևափոխություններն են, որոնք կապված են Քլիֆորդի հանրահաշվի հետ և բավարարում են ֆիզիկական տեսանկյունից կարևոր էյլերի պայմանին: Հուրվիցի ձևափոխության եզակիությունն այն է, որ օսլիլատորի խնդրից ստացվում է Կեպլեր-Կուլոնի խնդրը: Այնուամենայնիվ, նման անցումը հնարավոր է միայն 2, 4 և 8 չափանի օսցիլյատորային տարածությունների համար: Հուրվիցի ձևափոխությունները վերափոխում են այս չափերը 2, 3 և 5 չափերի՝ ընդգրկելով տեսական ֆիզիկայի խնդիրների շատ լայն շրջանակ:

(2,4,8)→(2,3,5) ձևափոխությունների ժամանակ ազատության որոշ աստիճաններ կորչում են: Մենք հիմնարար դեր ենք տալիս ազատության այս աստիճաններին՝ օգտագործելով դրանք կոնֆիգուրացիոն տարածությունների վրա (2,3,5) տրամաչափային տարածություններ կառուցելու համար:

Տոպոլոգիապես ոչ տրիվիալ օբյեկտների առաջացումը երկչափ, քառաչափ և ութչափանի իզոտրոպ օսցիլյատորներից սովորաբար կոչվում է դիոն-օսցիլատորային դուալություն, և հատուկ դեպքերում, երբ երկչափ, եռաչափ և ութչափանի իզոտրոպ օսցիլյատորներից գեներացվում են երկչափ, եռաչափ և հնգչափանի Կեպլեր-Կուլոնի խնդիրները, ընդունված է անվանել Կուլոն-օսցիլյատորային դուալություն կամ Կուլոն- օսցիլյատորային անալոգիա:

Էլեկտրական լիցքի գեներացիան ապահովում է Հուրվիցի ձևափոխությունները, որոնցով օսցիլյատորային մոդելներից ստացվում են կուլոնյան մոդելները: Մագնիսական լիցքի գեներացիան կատարվում է ձևափոխություններով, որը կապում է օսցիլյատորային տարածությունը տրամաչափային տարածության հետ: Այս մաթեմատիկական ձևափոխությունների արդյունքում ծնվում են այնպիսի տոպոլոգիապես ոչ զրոյական օբյեկտներ, ինչպիսիք են լիցք-դիոն կապված համակարգը և Յանգ-Կուլոնի SU(2) մոնոպոլը:

Օսցիլյատորային մոդելներից տոպոլոգիապես ոչ տրիվիալ համակարգերի անցումը կրում է դուալության հայեցակարգային կարևոր տարր, որը բաղկացած է նրանից, որ օսցիլյատորի էներգիան և կապի հաստատունը վերածվում են տոպոլոգիապես ոչ տրիվիալ համակարգերի կապի հաստատունի և էներգիայի: Այսպիսով, օսցիլյատորը նույնական չէ, այլ դուալ է տոպոլոգիապես ոչ տրիվիալ համակարգերի հետ: Այս փաստը Շրյոդինգերի օպերատորի հիմնարար հատկությունն է, որը բացատրում է դիոնների առաջացման խնդրի և Վիտենի դուալության միջև կապը:

Դիտարկված է Յանգ-Կուլոնի SU(2) մոնոպոլի մոդելը, որը բաղկացած է լիցքավորված իզոսպինային մասնիկից և Յանգի մոնոպոլից, որը կառուցվել է ութչափանի իզոտրոպ օսլիլատորից՝ օգտագործելով Հուրվիցի ձևափոխությունների ընդհանրացված տարբերակը: Նշենք նաև, որ սկզբնական համակարգում, այսինքն՝ ութչափանի իզոտրոպ օցիլատորի էներգիայի սպեկտրը ընդունում է միայն դիսկրետ արժեքներ, այսինքն՝ նման դաշտում գտնվող մասնիկը կատարում է միայն վերջավոր շարժում: Մասնիկի վերջավոր շարժումով պայմանավորված, Բերտրանի թեորեմի համաձայն, միայն այս դաշտերում մասնիկի հետագծերը փակ կորեր են: Ի տարբերություն սկզբնական համակարգի՝ ընդհանուր առմամբ, վերջնական համակարգի էներգետիկ սպեկտրը կարող է ընդունել ինչպես դիսկրետ, այնպես էլ անընդհատ արժեքներ:

Yang-Coulomb Monopole Model $SU(2)$

Petrosyan Mara
Arzumanyan Silva
Grigoryan Susanna

Summary

Keywords: *superintegrable systems, Schrödinger equation, Hurwitz transformations, isotrope oscillator, Laplace operator, field tensor.*

The problem of generating monopoles is part of the broader problem of finding Witten duality within the framework of non-relativistic quantum mechanics. The non-bijective Hurwitz transformations, which are related to the Clifford algebra and meet the physically significant Euler condition, are the starting point for the creation of monopoles and dions. The uniqueness of the Hurwitz transformation is that it translates the oscillator problem into the Kepler-Coulomb problem. However, such a transition is possible only for oscillatory spaces with dimensions of 2, 4, and 8. Hurwitz transformations modify these dimensions into dimensions 2, 3 and 5, covering a very wide range of problems in theoretical physics.

When displaying (2,4,8) →(2,3,5), some degrees of freedom are lost. We give these degrees of freedom a fundamental role by using them to construct gauge spaces on configuration spaces (2,3,5).

The generation of topologically non-trivial objects from a two-dimensional, four-dimensional and eight-dimensional isotropic oscillator is usually called a dione-oscillatory duality, and in specific cases, when a two-dimensional, three- and eight-dimensional isotrop oscillator is generated by two-dimensional, three-dimensional and five-dimensional Kepler-Coulomb problems is usually called a coulomb-oscillatory duality or a coulomb-oscillatory analogy.

The generation of electric charge is provided by the Hurwitz transform, as it modifies the oscillatory models into Coulomb models. The generation of a magnetic charge is made by a transformation that connects oscillatory spaces with calibration spaces. As a result of these mathematical transformations, such topologically non-trivial objects as the connected charge-dion system and the SU(2) Yang-Coulomb monopole are generated.

The transition from oscillator models to topologically non-trivial systems carries with it a conceptually important element of duality, consisting in the fact that the energy and coupling constant of the oscillator transform into a coupling constant and energy of topologically non-trivial systems. Thus, the oscillator is not identical, but dual to topologically non-trivial systems. This fact is a fundamental property of the Schrödinger operator, which explains the connection of the problem of dione generation with witten duality.

A five-dimensional model of the Young-Coulomb monopole, consisting of a charged isospin particle and a Young monopole, which was constructed from an eight-dimensional isotropic oscillator using a generalized version of the Hurwitz transformation, is considered. Note also that in the original system, i.e. in an eight-dimensional isotropic oscillator, the energy spectrum takes only discrete values, i.e. a particle in such a field makes only finite motion. Due to finite motion of a particle, according to Bertrand's theorem, only in these fields are the trajectories of the particle closed curves. Generally speaking, unlike the original system, the energy spectrum of the finite system can take both discrete and continuous values.

Ներկայացվել է 14.10.2022թ.
Գրախոսվել է 05.11.2022 թ.
Ընդունվել է տպագրության 25.11.2022 թ.